

空间散乱数据多项式自然样条光顺*

许伟志, 关履泰, 徐应祥

(中山大学科学计算与计算机应用系, 广东 广州 510275)

摘要: 考虑对空间散乱数据的一种多项式自然样条光顺逼近, 得到解的特征性质和解的结构, 并给出了算例。

关键词: 散乱数据拟合; 多项式自然样条; 光顺逼近

中图分类号: TP391.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2010)06-0020-07

Smoothing of Space Scattered Data by Polynomial Natural Splines

XU Weizhi, GUAN Lita, XU Yingxiang

(Department of Scientific Computing and Computer Application,
Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A method of smoothing space scattered data by polynomial natural splines is studied. The characteristics and the structure of the solution are given. Numerical examples illustrate the method.

Key words: scattered data fitting; polynomial natural spline; smoothing approximation

多元散乱数据拟合广泛用于数据压缩、汽车外形设计、船体放样、飞机机翼机身设计、服装设计、地质探矿、医学图像处理等诸多领域, 从上世纪60年代开始, 众多研究工作者对散乱数据曲面拟合问题进行了一系列的研究^[1-6]。但是都不如一元B样条处理一元散乱数据那样理想。李岳生和关履泰在1989年试图推广一元三次自然样条对散乱点插值的方法到二元情形, 提出了散乱数据的二元多项式自然样条插值, 研究了广义混合样条函数空间矩形域带连续边界条件和离散边界条件的多元散乱数据最优插值问题^[7]。胡日章研究了相应的光顺逼近问题^[8], 韩国强从计算的角度提出了散乱数据光顺逼近二步法^[9]。但是这类样条的目标泛函比较复杂, 带有一系列的积分项^[7-8, 10], 而且如果离散边界插值点不够多的话插值效果会比较差。为了克服这些缺点, 关履泰、许伟志等研究了一类新的二元自然样条插值方法, 该方法的目标泛函较为简单, 没有离散边界插值点, 更符合实际情况^[11]。然而当测量数据受误差和噪声影响时, 插

值方法不如光顺方法那样能够很好地反映数据的本质。为此, 本文在文[11]的基础上提出了一种多项式自然样条光顺方法, 并研究了解的性质和解的结构。

1 问题的提出

给定矩形区域 $R = [a_1, a_2] \times [c_1, c_2]$, $a < a_1$, $c < c_1$, 自然数 m, n , 及给定 N 个散乱数据点及其值 $\{(x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, \dots, N\}$ 。设

$X = H^{m,n}(R) = \{u(x, y) \mid \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} \in L_2(R), \frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \text{ 是绝对连续函数, 对 } \alpha = 0, \dots, m-1, \beta = 0, \dots, n-1 \text{ 成立, } (x, y) \in R\}$

$Y = L_2(R)$, $T: X \rightarrow Y$ 是一个从 X 到 Y 的线性微分算子, 在矩形区域 R 内定义为

$$T(u) = u^{(m,n)}(x, y) = \frac{\partial^{m+n} u(x, y)}{\partial x^m \partial y^n}$$

在边界 $x = a, y = c$ 上, 它带边界条件

* 收稿日期: 2009-11-11

基金项目: 教育部高等学校博士点科研基金资助项目(200805581022); 广东省自然科学基金资助项目(7003624)
作者简介: 许伟志(1977年生), 男, 博士生; E-mail: xwz_jly@126.com

$$\begin{cases} u^{(m,v)}(x,c) = \frac{\partial^{m+v} u(x,y)}{\partial x^m \partial y^v} \Big|_{y=c} = 0, \\ v = 0, \dots, n-1 \\ u^{(\mu,n)}(a,y) = \frac{\partial^{\mu+n} u(x,y)}{\partial x^\mu \partial y^n} \Big|_{x=a} = 0, \\ \mu = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

记 $Z = R^N$ 是 N 维欧几里得空间。假设 $A: X \rightarrow Z$ 是一个插值算子, 定义为

$$Au = (u(x_1, y_1), \dots, u(x_N, y_N))$$

为了方便, 令 $z = (z_1, \dots, z_N)$ 。考虑以下在希尔伯特空间 $H^{m,n}(R)$ 中的样条光顺问题, 称之为散乱点二元多项式自然样条光顺问题。

问题 T 寻找一个函数 $\sigma(x, y) \in X$, 满足

$$\sigma = \arg \min_{u \in X} \{ \rho \|Tu\|_Y^2 + \|Au - z\|_Z^2 \} \quad (1)$$

其中 $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$, $\rho > 0$ 是事先给定的常数。

这里 $\|Tu\|^2 = \iint_R (u^{(m,n)}(x, y))^2 dx dy$, 带边界条件

$$\begin{cases} u^{(m,v)}(x,c) = \frac{\partial^{m+v} u(x,y)}{\partial x^m \partial y^v} \Big|_{y=c} = 0, \\ v = 0, \dots, n-1 \\ u^{(\mu,n)}(a,y) = \frac{\partial^{\mu+n} u(x,y)}{\partial x^\mu \partial y^n} \Big|_{x=a} = 0, \\ \mu = 0, \dots, m-1 \end{cases} \quad (2)$$

即寻找一个函数 $\sigma(x, y) \in X$, 满足

$$J(\sigma) = \rho \iint_R (\sigma^{(m,n)}(x, y))^2 dx dy + \sum_{i=1}^N (\sigma(x_i, y_i) - z_i)^2 =$$

$$\min_{u \in X} \left\{ \rho \iint_R (u^{(m,n)}(x, y))^2 dx dy + \sum_{i=1}^N (u(x_i, y_i) - z_i)^2 \right\}$$

其中 $\rho > 0$, 是事先给定的常数。带边界条件

$$\begin{cases} u^{(m,v)}(x,c) = \frac{\partial^{m+v} u(x,y)}{\partial x^m \partial y^v} \Big|_{y=c} = 0, \\ v = 0, \dots, n-1 \\ u^{(\mu,n)}(a,y) = \frac{\partial^{\mu+n} u(x,y)}{\partial x^\mu \partial y^n} \Big|_{x=a} = 0, \\ \mu = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

2 带边界条件的自然样条基函数的构造

容易验证下列引理。

引理 1 算子 T 的化零子空间满足

$$N(T) = P\langle m, n \rangle = \{u \mid u(x, y) =$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_{ij} x^i y^j, c_{ij} \text{ 是任意实数} \}$$

定理 1 (特征定理) $\sigma(x, y) \in X$ 是二元多项式自然样条光顺问题解的充要条件为

$$\rho \iint_R \sigma^{(m,n)}(x, y) u^{(m,n)}(x, y) dx dy +$$

$$\sum_{i=1}^N u(x_i, y_i) (\sigma(x_i, y_i) - z_i) = 0 \quad (3)$$

对一切 $u(x, y) \in X$ 成立。

证明 (必要性) 设 $\sigma(x, y) \in X$ 是二元多项式自然样条光顺问题的解, 任意的 $u(x, y) \in X, \varepsilon$ 为微小参数。记 $u_\varepsilon(x, y) = \sigma(x, y) + \varepsilon u(x, y)$ 代入问题 (1) 式, 得

$$F(\varepsilon) = \rho \iint_R (\sigma^{(m,n)}(x, y) + \varepsilon u^{(m,n)}(x, y))^2 dx dy + \sum_{i=1}^N (\sigma(x_i, y_i) + \varepsilon u(x_i, y_i) - z_i)^2$$

由于 $\sigma(x, y) \in X$ 为问题 T 的解, 所以 $F'(0) = 0$, 即

$$F'(\varepsilon) = 2\rho \iint_R u^{(m,n)}(x, y) \cdot$$

$$(\sigma^{(m,n)}(x, y) + \varepsilon u^{(m,n)}(x, y)) dx dy +$$

$$2 \sum_{i=1}^N u^{(m,n)}(x_i, y_i) (\sigma(x_i, y_i) + \varepsilon u(x_i, y_i) - z_i)^2$$

即

$$\rho \iint_R \sigma^{(m,n)}(x, y) u^{(m,n)}(x, y) dx dy +$$

$$\sum_{i=1}^N u(x_i, y_i) (\sigma(x_i, y_i) - z_i) = 0$$

(充分性) 记 $J_1(u) = \rho \iint_R (u^{(m,n)})^2 dx dy +$

$$\sum_{i=1}^N (u(x_i, y_i))^2 \geq 0$$
。直接验证得知

$$J(u) = J(\sigma + u - \sigma) =$$

$$J(\sigma) + J_1(u - \sigma) + a(\sigma, u - \sigma)$$

由充分性条件, 有

$$\rho \iint_R \sigma^{(m,n)}(x, y) u^{(m,n)}(x, y) dx dy +$$

$$\sum_{i=1}^N u(x_i, y_i) (\sigma(x_i, y_i) - z_i) = 0$$

对一切 $u(x, y) \in X$ 都成立。那么对于 $u - \sigma \in X$, 有

$$\rho \iint_R \sigma^{(m,n)}(x, y) (u^{(m,n)}(x, y) - \sigma^{(m,n)}(x, y)) dx dy +$$

$$\sum_{i=1}^N (u(x_i, y_i) - \sigma(x_i, y_i)) (\sigma(x_i, y_i) - z_i) = 0$$

记 $a(u, v) = \rho \iint_R u^{(m,n)} v^{(m,n)} dx dy + \sum_{i=1}^N u(x_i, y_i) (v(x_i, y_i) - z_i)$ 。上面结果可写成 $a(\sigma, u - \sigma) = 0$ 。故 $J(u) = J(\sigma) + J_1(u - \sigma)$, 从而 $J(\sigma) \leq J(u)$ 。定理得证。

引理 2 设 $\sigma(x, y) \in X$ 是二元多项式自然样条光顺的解, 那么必存在系数 λ_i 与 $k_i (i = 1, \dots, N)$ 使得

$$T^* T\sigma = \sum_{i=1}^N \lambda_i k_i$$

证明 由特征定理可知

$$\rho \iint_R \sigma^{(m,n)}(x,y) u^{(m,n)}(x,y) dx dy + \sum_{i=1}^N u(x_i, y_i) (\sigma(x_i, y_i) - z_i) = 0$$

即

$$\rho(T^* T\sigma, u) + \sum_{i=1}^N u(x_i, y_i) (\sigma(x_i, y_i) - z_i) = 0, Au(x, y) = (u(x_1, y_1), \dots, u(x_N, y_N)) = ((k_1, u), \dots, (k_N, u))$$

$N(A)^\perp$ 是 $N(A)$ 的正交补空间, 是有限维的, 且基为 $k_i \in X (i = 1, \dots, N)$, 所以对于 $\forall u(x, y) \in N(A)$, 这时 $u(x_i, y_i) = 0, i = 1, \dots, N$ 由上述特征定理有 $(T^* T\sigma, u) = 0$, 从而 $T^* T\sigma \in N(A)^\perp$ 。即

$$\exists \lambda_i (i = 1, \dots, N), \text{使得 } T^* T\sigma = \sum_{i=1}^N \lambda_i k_i \text{ 成立。}$$

定理 2 二元多项式自然样条光滑函数 $\sigma(x, y)$ 具有如下的显式及紧凑格式的表达式

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i g_i(x, y) + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_{ij} x^i y^j$$

其中 $g_i(x, y) = G(x_i, m, a; x) G(y_i, n, c; y), i = 1, \dots, N$ 是 $(2m-1, 2n-1)$ 次自然样条基函数, 并且有

$$G(x_i, m, a; x) \equiv (-1)^m \frac{(x_i - x)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} + \sum_{j=0}^{m-1} c_j(x_i, m, a) (x - a)^j$$

其中 $c_j(x_i, m, a) = (-1)^{m+j-1} \frac{(x_i - a)^{2m-j-1}}{j!(2m-j-1)!}$,

$$G(y_i, n, c; y) \equiv (-1)^n \frac{(y_i - y)_+^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{j=0}^{n-1} c_j(y_i, n, c) \cdot (y - c)^j \text{ 且}$$

$$c_j(y_i, n, c) = (-1)^{n+j-1} \frac{(y_i - c)^{2n-j-1}}{j!(2n-j-1)!}$$

证明 由引理 2 及其证明可知, 如果 $\sigma(x, y)$ 是二元多项式自然样条光滑的解, 则对任意的 $v \in N(T)$, 有 $\langle T^* T\sigma, v \rangle = 0, T^*$ 是 T 的共轭算子; 并且存在系数 λ_i 与 $k_i \in X$ 使得 $T^* T\sigma = \sum_{i=1}^N \lambda_i k_i$ 。由于对任意的 $v \in N(T)$, 有 $\langle k_i, v \rangle = x_i^j y_i^l$ 该结论变为

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i^j y_i^l = 0, j = 0, 1, \dots, m-1, l = 0, \dots, n-1$$

对任意 X 中的元素 u , 在 a 点 Taylor 展开

$$u(x, y) = u(a, y) + (x - a)u^{(1,0)}(a, y) + \dots +$$

$$\frac{(x - a)^{m-1} u^{(m-1,0)}(a, y)}{(m-1)!} +$$

$$\int_a^b \frac{(x - \tau)_+^{m-1} u^{(m,0)}(\tau, y)}{(m-1)!} d\tau$$

然后在 c 点 Taylor 展开 $u(a, y), u^{(1,0)}(a, y), \dots, u^{(m-1,0)}(a, y), u^{(m,0)}(\tau, y)$ 得

$$u(x_i, y_i) = u(a, c) + (y_i - c)u^{(0,1)}(a, c) + \dots + \frac{(y_i - c)^{n-1} u^{(0,n-1)}(a, c)}{(n-1)!} +$$

$$\int_c^d \frac{(y_i - t)_+^{n-1} u^{(0,n)}(a, t)}{(n-1)!} dt +$$

$$(x_i - a)u^{(1,0)}(a, c) + \dots +$$

$$\frac{(x_i - a)(y_i - c)^{n-1} u^{(1,n-1)}(a, c)}{(n-1)!} +$$

$$\int_c^d \frac{(x_i - a)(y_i - t)_+^{n-1} u^{(1,n)}(a, t)}{(n-1)!} dt + \dots +$$

$$\frac{(x_i - a)^{m-1} u^{(m-1,0)}(a, c)}{(m-1)!} +$$

$$\dots + \frac{(x_i - a)^{m-1} (y_i - c)^{n-1} u^{(0,n-1)}(a, c)}{(m-1)! (n-1)!} +$$

$$\int_c^d \frac{(x_i - a)^{m-1} (y_i - t)_+^{n-1} u^{(0,n)}(a, t)}{(m-1)! (n-1)!} dt +$$

$$\int_a^b \frac{(x_i - \tau)_+^{m-1} u^{(m,0)}(\tau, c) d\tau + \dots +$$

$$\int_a^b \frac{(x_i - \tau)_+^{m-1} (y_i - c)^{n-1} u^{(m,n-1)}(\tau, c)}{(m-1)! (n-1)!} d\tau +$$

$$\iint_{a^b c^d} \frac{(x_i - \tau)_+^{m-1} (y_i - t)_+^{n-1} u^{(m,n)}(\tau, t)}{(m-1)! (n-1)!} d\tau dt$$

利用上面结论, 并注意边界条件, 对任意 X 中的元素 u 有

$$\langle T\sigma, Tu \rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i u(x_i, y_i) =$$

$$\iint_{a^b c^d} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \frac{(x_i - \tau)_+^{m-1} (y_i - t)_+^{n-1}}{(m-1)! (n-1)!} \right) \cdot$$

$$u^{(m,n)}(\tau, t) d\tau dt = \langle T\tilde{G}, Tu \rangle$$

$$\tilde{G}(x, y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i g_i(x, y) + f(x, y),$$

$$f(x, y) \in N(T)$$

其中 $g_i(x, y) = G(x_i, m, a; x) G(y_i, n, c; y), i = 1, \dots, N$ 。满足

$$\begin{cases} G^{(m)}(x_i, m, a; x) = \frac{\partial^m G(x_i, m, a; x)}{\partial x^m} = \frac{(x_i - x)_+^{m-1}}{(m-1)!} \\ G^{(n)}(y_i, n, c; y) = \frac{\partial^n G(y_i, n, c; y)}{\partial y^n} = \frac{(y_i - y)_+^{n-1}}{(n-1)!} \end{cases}$$

由 \bar{G} 满足边界条件 (2), 那么

$$\begin{cases} g_i^{(m,v)}(x,c) = g_i^{(\mu,n)}(a,y) = 0 \\ v = 0, 1, \dots, n-1; \mu = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

所以

$$\sigma(x,y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i g_i(x,y) + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_{ij} x^i y^j$$

其中 $g_i(x,y) = G(x_i, m, a; x) G(y_i, n, c; y)$, $i = 1, \dots, N$ 是 $(2m-1, 2n-1)$ 次自然样条基函数, 并且有

$$G(x_i, m, a; x) \equiv (-1)^m \frac{(x_i - x)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} +$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} c_j(x_i, m, a) (x-a)^j$$

其中 $c_j(x_i, m, a) = (-1)^{m+j-1} \frac{(x_i - a)^{2m-j-1}}{j!(2m-j-1)!}$;

$$G(y_i, n, c; y) \equiv (-1)^n \frac{(y_i - y)_+^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_j(y_i, n, c) (y-c)^j$$

且

$$c_j(y_i, n, c) = (-1)^{n+j-1} \frac{(y_i - c)^{2n-j-1}}{j!(2n-j-1)!},$$

而其系数 $c_j(x_i, m, a)$ 和 $c_j(y_i, n, c)$ 由 (4) 取得。用边界条件 $g_i^{(m,v)}(x,c) = 0, v = 0, 1, \dots, n-1$ 得出

$$0 = \frac{d^v}{dy^v} \left((-1)^n \frac{(y_i - y)_+^{2n-1}}{(2n-1)!} + \right.$$

$$\left. \sum_{j=0}^{n-1} c_j(y_i, n, c) (y-c)^j \right) \Big|_{y=c},$$

$$v = 0, \dots, n-1$$

从求 $n-1$ 阶导数开始, 由上式推出

$$0 = \left((-1)^{n+v} \frac{(y_i - y)_+^n}{n!} + \right.$$

$$\left. (n-1)! c_{n-1}(y_i, n, c; y) \right) \Big|_{y=c} =$$

$$(-1)^{n+v} \frac{(y_i - c)_+^n}{n!} + (n-1)! c_{n-1}(y_i, n, c; y),$$

$$c_{n-1}(y_i, n, c; y) = (-1)^{n+v-1} \frac{1}{(n-1)!} \frac{(y_i - c)^n}{n!} =$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \frac{(y_i - c)^n}{n!}, v = n-1$$

然后, 利用这个结果代入求 $n-2$ 阶导数的式子中得到

$$0 = \left((-1)^{n+v} \frac{(y_i - y)_+^{n+1}}{(n+1)!} + \right.$$

$$\left. (n-2)! c_{n-2}(y_i, n, c; y) + \right.$$

$$\left. (n-2)! c_{n-1}(y_i, n, c; y) (y-c) \right) \Big|_{y=c} =$$

$$(-1)^{n+v} \frac{(y_i - c)_+^{n+1}}{(n+1)!} + (n-2)! c_{n-2}(y_i, n, c; y),$$

$$c_{n-2}(y_i, n, c; y) =$$

$$(-1)^{n+v-1} \frac{1}{(n-2)!} \frac{(y_i - c)^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$- \frac{1}{(n-2)!} \frac{(y_i - c)^{n+1}}{(n+1)!}, v = n-2$$

再用上述这些结果, 代入求 $n-3$ 阶导数的式子中, 有

$$0 = \left((-1)^{n+v} \frac{(y_i - y)_+^{n+2}}{(n+2)!} + \right.$$

$$(n-3)! c_{n-3}(y_i, n, c; y) +$$

$$(n-3)! (c_{n-2}(y_i, n, c; y) (y-c) +$$

$$c_{n-1}(y_i, n, c; y) (y-c)^2) \Big|_{y=c} =$$

$$(-1)^{n+v} \frac{(y_i - c)_+^{n+2}}{(n+2)!} + (n-3)! c_{n-3}(y_i, n, c; y),$$

$$c_{n-3}(y_i, n, c; y) =$$

$$(-1)^{n+v-1} \frac{1}{(n-3)!} \frac{(y_i - c)^{n+2}}{(n+2)!} =$$

$$\frac{1}{(n-3)!} \frac{(y_i - c)^{n+2}}{(n+2)!}, v = n-3$$

继续下去……, 得到

$$c_0(y_i, n, c; y) = (-1)^{n+v-1} \frac{1}{0!} \frac{(y_i - c)^{2n-1}}{(2n-1)!}, v = 0$$

同理, 用边界条件 $g_i^{(n,v)}(y,a) = 0, v = 0, 1, \dots, m-1$,

可得 $c_j(x_i, m, a) = (-1)^{m+j-1} \frac{(x_i - a)^{2m-j-1}}{j!(2m-j-1)!}$ 。

3 散乱点自然样条光顺问题求解

定理 3 如果相应的齐次多项式光顺问题只有恒零解, 则对任意散乱数据 $(x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, N, (2m-1, 2n-1)$ 次多项式自然样条光顺问题有唯一解, 可表示为

$$\sigma(x,y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i g_i(x,y) + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_{ij} x^i y^j$$

其中 $g_i(x,y) = G(x_i, m, a; x) G(y_i, n, c; y), i = 1, \dots, N$ 是 $(2m-1, 2n-1)$ 次自然样条基函数, 并且有

$$G(x_i, m, a; x) \equiv (-1)^m \frac{(x_i - x)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} +$$

$$\sum_{j=0}^{m-1} c_j(x_i, m, a) (x-a)^j$$

其中 $c_j(x_i, m, a) = (-1)^{m+j-1} \frac{(x_i - a)^{2m-j-1}}{j!(2m-j-1)!}$ 。

$$G(y_i, n, c; y) \equiv (-1)^n \frac{(y_i - y)_+^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{j=0}^{n-1} c_j(y_i, n, c) (y - c)^j,$$

且

$$c_j(y_i, n, c) = (-1)^{n+j-1} \frac{(y_i - c)^{2n-j-1}}{j!(2n-j-1)!}$$

c_{ij} 及 λ_i 由以下的方程组来确定

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中

$$A = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T, z = (z_1, \dots, z_N)^T,$$

$$C = (c_{00}, c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0(n-1)}),$$

$$c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1(n-1)}, \dots, c_{(m-1)(n-1)}^T,$$

$$A = (a_{ij})_{N \times N},$$

$$a_{ij} = \left((-1)^m \frac{(x_i - x_j)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} + \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{m+s-1} \frac{(x_i - a)^{2m-s-1}}{s!(2m-s-1)!} (x_j - a)^s \right) \times$$

$$\left((-1)^n \frac{(y_i - y_j)_+^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n+s-1} \frac{(y_i - c)^{2n-s-1}}{s!(2n-s-1)!} (y_j - c)^s \right), (i \neq j)$$

$$\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n+s-1} \frac{(y_i - c)^{2n-s-1}}{s!(2n-s-1)!} (y_j - c)^s, (i \neq j)$$

$$a_{ii} = \rho + \left(\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{m+s-1} \frac{(x_i - a)^{2m-1}}{s!(2m-s-1)!} \right) \times$$

$$\left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n+s-1} \frac{(y_i - c)^{2n-1}}{s!(2n-s-1)!} \right),$$

$$B = (1, y_j, y_j^2, \dots, y_j^{n-1}, x_j, x_j y_j, \dots, x_j y_j^{n-1}, \dots, x_j^{m-1} y_j^{n-1})_{N \times (n \times m)}, j = 1, \dots, N$$

证明 由特征定理可知, $\sigma(x, y) \in X$ 是二元多项式自然样条光顺问题解的充要条件为

$$\rho \iint_R \sigma^{(m,n)}(x, y) u^{(m,n)}(x, y) dx dy + \sum_{i=1}^N u(x_i, y_i) (\sigma(x_i, y_i) - z_i) = 0 \quad (5)$$

对一切 $u(x, y) \in X$ 成立。又由引理 2 知

$$T^* T \sigma = \sum_{i=1}^N \lambda_i k_i,$$

$$(T \sigma, T u) = (T^* T \sigma, u) = \sum_{i=1}^N \lambda_i (k_i, u) = \sum_{i=1}^N \lambda_i u(x_i, y_i)$$

代入 (5) 式得

$$\rho \sum_{i=1}^N \lambda_i u(x_i, y_i) + \sum_{i=1}^N u(x_i, y_i) (\sigma(x_i, y_i) - z_i) = 0$$

即

$$\sum_{i=1}^N u(x_i, y_i) [\rho \lambda_i + (\sigma(x_i, y_i) - z_i)] = 0$$

再由 $u(x, y)$ 的任意性可知 $\rho \lambda_i + \sigma(x_i, y_i) - z_i = 0, i = 1, 2, \dots, N$ 。即

$$\sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_j g_j(x_i, y_i) + (\rho + g_i(x_i, y_i)) \lambda_i + \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} c_{\mu\nu} x_i^\mu y_i^\nu - z_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

得到前 N 个方程。注意在定理 2 的证明过程中, 我们已经得出

$$\begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_N = 0 \\ y_1 \lambda_1 + \dots + y_N \lambda_N = 0 \\ y_1^2 \lambda_1 + \dots + y_N^2 \lambda_N = 0 \\ \dots \\ y_1^{n-1} \lambda_1 + \dots + y_N^{n-1} \lambda_N = 0 \\ x_1 \lambda_1 + \dots + x_N \lambda_N = 0 \\ y_1 x_1 \lambda_1 + \dots + y_N x_N \lambda_N = 0 \\ \dots \\ y_1^{n-1} x_1^{m-1} \lambda_1 + \dots + y_N^{n-1} x_N^{m-1} \lambda_N = 0 \end{cases}$$

这就是后面 $m \times n$ 个方程。写成矩阵形式后则证得本定理。由二项式定理可证以下结论。

定理 4 二元多项式自然样条光顺问题解的系数矩阵, $P = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$ 是对称的, 其中

数矩阵, $P = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$ 是对称的, 其中

$$A = (a_{ij})_{N \times N}, a_{ij} = \left((-1)^m \frac{(x_i - x_j)_+^{2m-1}}{(2m-1)!} + \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{m+s-1} \frac{(x_i - a)^{2m-s-1}}{s!(2m-s-1)!} (x_j - a)^s \right) \times$$

$$\left((-1)^n \frac{(y_i - y_j)_+^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n+s-1} \frac{(y_i - c)^{2n-s-1}}{s!(2n-s-1)!} (y_j - c)^s \right), (i \neq j)$$

$$\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n+s-1} \frac{(y_i - c)^{2n-s-1}}{s!(2n-s-1)!} (y_j - c)^s, (i \neq j)$$

$$a_{ij} = \rho + \left(\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^{m+s-1} \frac{(x_i - a)^{2m-1}}{s!(2m-s-1)!} \right) \times$$

$$\left(\sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n+s-1} \frac{(y_i - c)^{2n-1}}{s!(2n-s-1)!} \right),$$

$$B = (1, y_j, y_j^2, \dots, y_j^{n-1}, x_j, x_j y_j, \dots, x_j y_j^{n-1}, \dots, x_j^{m-1} y_j^{n-1})_{N \times (n \times m)}, j = 1, \dots, N$$

4 求光顺函数算法

由定理 3 和定理 4 可得求光顺函数算法如下:

(i) 输入散乱数据点 $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ 及要在其上拟合的数据 $z_i, i = 1, \dots, N$ 及合适的光顺参数 ρ ;

(ii) 计算矩阵 A ;

(iii) 形成矩阵 $P = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$;

(iv) 求解方程组 $\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix}$;

(v) 求出光顺函数

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^N \lambda_i g_i(x, y) + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_{ij} x^i y^j$$

5 算例

例 1 拟合函数: $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$, 区间: $[0, 1] \times [0, 1]$, 边界: $a = -1, c = -1$ 。对 301 个散乱点 (由随机数产生) 相应的函数值, 分别运用双三次自然样条光顺方法 ($\rho = 0.005$) 与双三次自然样条插值方法去拟合函数, 比较它们在所在区域 30×30 个格子点上的函数值 F_i , 导数值

$$F_i^{10} = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_i, y=y_i}, F_i^{01} = \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{x=x_i, y=y_i}, F_i^{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Big|_{x=x_i, y=y_i}$$

的平均误差与最大误差 (见表 1)。

表 1 301 个散乱数据插值和光顺的函数值、导数值误差

Table 1 The error of interpolation and smoothing 301 scattered data and the error of their derivatives

数据类型	平均误差		最大误差	
	光顺	插值	光顺	插值
F_i	9.1E-05	4.03E-06	0.000 834	0.000 396
F_i^{10}	0.000 371	0.000 337	0.011 475	0.006 017
F_i^{01}	0.000 942	0.000 383	0.008 894	0.007 019
F_i^{11}	0.002 697	0.001 231	0.049 727	0.038 832

一般地, 选取合适参数的光顺样条方法得出的曲面较用插值方法得到的曲面光滑。

例 2 某地区重金属钍的 3 580 个测量值^[6], 分布如图 1, 分别用双三次自然样条插值和光顺 ($\rho = 0.012$), 应用极小残量法 (Generalized Minimal Residual Algorithm) 迭代求解对称不定的线性方程组^[12], 得到的结果 (如图 2)。

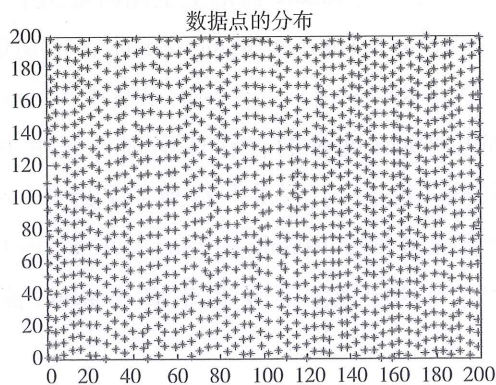


图 1 数据点的分布

Fig. 1 The distribution of scattered data

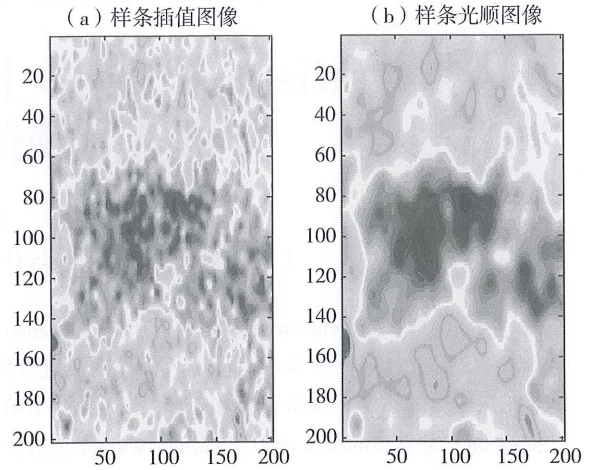


图 2 (a) 插值图像 (b) 光顺图像 ($\rho = 0.012$)

Fig. 2 (a) The interpolant image

(b) The smoothing image ($\rho = 0.012$)

由于测量数据存在误差和噪声, 插值图像并不能很好的反映重金属钍的分布情况, 而光顺图像很好地反映了重金属钍的实际分布情况。

例 3 拟合函数: $z = \cos(x) \times \sin(y)$ 区间: $[0, 4] \times [0, 4]$, 对 50、100、1 000 个散乱点 (由随机数产生) 相应的函数值, 分别用文 [11] 和文 [8] 中的双三次自然样条插值方法去拟合函数, 相应的系数矩阵的条件数比较如表 2。

表 2 方法 [8] 和 [11] 中的系数矩阵条件数比较

Table 2 The comparison of condition numbers of the coefficient matrix in [8] and [11]

点数	50	100	1 000
文 [8] 中的条件数 A_1	5.179e+014	1.117e+019	6.677e+025
文 [11] 中的条件数 A_2	2.648e+007	4.161e+008	2.757e+012
比值 $\frac{A_1}{A_2}$	1.956e+007	2.685e+010	2.421e+013

对相同散乱数据进行双三次样条插值拟合, 本文中方程组的系数矩阵条件数比文 [8] 中的系数矩阵条件数小, 更适合大规模散乱数据拟合。

结论: 选取合适参数的光顺样条方法得出的曲面较平滑, 外形比用插值方法好。在实际应用中, 当数据有误差和噪声时, 建议选取适当参数应用光顺样条方法获得拟合曲面。另外, 本文的方法容易推广到高维情形。本文中方程组的系数矩阵条件数比文 [8] 中的系数矩阵条件数小, 更适合大规模散乱数据拟合。

(下转第 30 页)

- [9] SIMPSON C T. Constructing variations of Hodge structures using Yang-Mills connections and applications to uniformization[J]. *J Amer Math Soc*, 1988, 1: 867 - 918.
- [10] NI L. Poisson equation and Hermitian-Einstein metrics on holomorphic vector bundles over complete noncompact Kähler manifolds[J]. *Indiana Univ Math J*, 2002, 3: 679 - 704.
- [11] MA L. Gradient estimates for a simple equation on complete non-compact Riemannian manifolds[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2006, 241: 374 - 382.
- [12] MA L, LI C, ZHAO L. Monotone solutions to a class of elliptic and diffusion equations[J]. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2007, 6(1): 237 - 246.

(上接第 25 页)

参考文献:

- [1] WAHBA G. Spline models for observational data[J]. *Soc Ind Appl Math*, 1990.
- [2] GUAN L T, LIU B. Surface design by natural splines over refined grid points[J]. *J Comp Anal and Appl*, 2004, 163(1): 107 - 115.
- [3] LAI M J. Multivariate splines for data fitting and approximation, *Approximation Theory XII* [M]. San Antonio, 2007, edited by Neamtu M and Schumaker L L, Brentwood: Nashboro Press, 2008: 210 - 228.
- [4] LAI M J, SCHUMAKER L L. Spline functions over triangulations [M]. London: Cambridge University Press, 2007.
- [5] 吴宗敏. 散乱数据拟合的模型、方法和理论 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.
- [6] BILLINGS S D, NEWSAM G N, BEATSON R K. Smooth fitting of geophysical data using continuous global surfaces [J]. *Geophysics*, 2002, 67 (6): 1810 - 1822.
- [7] 李岳生, 胡日章. 多元散乱数据的样条插值法 [J]. *高等学校计算数学学报*, 1990, 3: 215 - 226.
- [8] 胡日章. 矩形域上散乱数据的离散边界条件光顺逼近 [J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 1990, 29(4): 17 - 22.
- [9] 韩国强. 矩形域上散乱数据样条光顺法 [J]. *华南理工大学学报: 自然科学版*, 1993, 21(4): 102 - 109.
- [10] GUAN L T. Bivariate polynomial natural spline interpolation algorithms with local basis for scattered data [J]. *J Comp Anal and Appl*, 2003, 1: 77 - 101.
- [11] 关履泰, 许伟志, 朱庆勇. 一种散乱点双三次多项式自然样条插值 [J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2008, 47(5): 1 - 4.
- [12] SAAD Y, SCHULTZ M H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems [J]. *SIAM J Sci Stat Comput*, 1986, 7(3): 856 - 869.